2022 数学预测题

1．设函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{\cos x}$，则

A． $f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 上有且仅有 1 个零点

B． $f(x)$ 的最小正周期为 π

C． $f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减

D． $f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{3\pi}{2})$ 上单调递减

【答案】ACD

【解析】由二倍角公式可得， $\sin 2x=2\sin x\cos x$，

$\because\ f(x)=\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{\cos x}=\dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{\cos x}=0$， $\therefore \sin x=0$ 或 $\cos x=1$， $\therefore x=k\pi$ 或 $x=2k\pi$，$k\in Z$，

$\because\ x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$， $\therefore$ 当且仅当 $k=0$ 时，即 $x=0$ 时，满足 $f(x)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上有且只有一个零点，满足题意，则 A 正确，

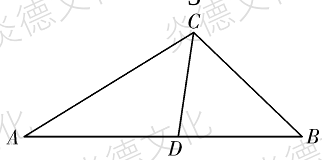
$f(x)=2\sin x-2\tan x$， $\because \sin x$ 的最小正周期为 2π， $\tan x$ 的最小正周期为 π，

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 2π，则 B 错误，

$f(x)=2\sin x-2\tan x$，则 $f'(x)=2\cos x-\dfrac{2[cos^2x-(-\sin x)\cdot\sin x]}{(\cos x)^2}=\dfrac{2(cos^3x-1)}{cos^2x}$，

$\because \cos^3x-1\leqslant 0\ \therefore f'(x)\leqslant 0$， $\therefore f(x)$ 在恒单调递减，则 C 、 D 正确，故选： ACD .

2．在△ABC 中，已知$(\sin A-\sin C)^2=\sin^2B-\dfrac{2}{5}\sin A\sin C$.



(1)求 $\cos B$ 的值；

(2)若 D 在 AB 边上，且满足 $AD=BC$，$\angle BDC=2B$，求 $\tan A$ 的值．

【解析】(1)因为$(\sin A-\sin C)^2=\sin^2B-\dfrac{2}{5}\sin A\sin C$，

得$(a-c)^2=b^2-\dfrac{2}{5}ac$，即 $a^2+c^2-b^2=\dfrac{8}{5}ac$，

由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{4}{5}$.

(2)设 $AD=BC=a$，

在△BCD中，$\angle BDC=2B$，$\dfrac{a}{\sin 2B}=\dfrac{CD}{\sin B}$，①

在△ACD中，$\dfrac{a}{\sin\angle ACD}=\dfrac{CD}{\sin A}$，

因为$\angle ACD=2B-A$，所以$\dfrac{a}{\sin(2B-A)}=\dfrac{CD}{\sin A}$，②

由①②得，$\dfrac{\sin(2B-A)}{\sin 2B}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，

所以 $\sin(2B-A)\sin B=\sin A\sin 2B$，

因为 $\sin B>0$，

所以 $\sin 2B\cos A-\cos 2B\sin A=2\sin A\cos B$，

所以 $\tan A=\dfrac{\sin 2B}{\cos 2B+2\cos B}$.

由(1)知，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，又 $0<B<\pi$，所以 $\sin B=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\sin 2B=2\sin B\cos B=\dfrac{24}{25}$，$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=\dfrac{7}{25}$，

则 $\tan A=\dfrac{\sin 2B}{\cos 2B+2\cos B}=\dfrac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}+\frac{8}{5}}=\dfrac{24}{47}$.

3．△ABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$a=6$，$b+12\cos B=2c$.

(1)求A的大小；

(2)M为△ABC的垂心，AM的延长线交BC于点D，$MD=\sqrt{3}$，求△ABC的面积.

【解析】(1)在△ABC中，由余弦定理得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，又因为$a=6$，$b+12\cos B=2c$，

所以 $b+12\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2c$，

整理得 $b^2+c^2-36=bc$.

在△ABC中，由余弦定理得 $b^2+c^2-36=2bc\cos A$，所以 $bc=2bc\cos A$，

即 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)因为M为△ABC的垂心，所以$\angle BMD=\dfrac{\pi}{2}-\angle MBD=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\angle ACB\right)=\angle ACB$，

又 $MD=\sqrt{3}$，

在△MBD中，$BD=MD\cdot\tan\angle BMD=\sqrt{3}\tan\angle ACB$，

同理可得 $CD=\sqrt{3}\tan\angle ABC$，

又因为 $BD+CD=6$，

所以$\sqrt{3}\tan\angle ABC+\sqrt{3}\tan\angle ACB=6$，

即 $\tan\angle ABC+\tan\angle ACB=2\sqrt{3}$，

又因为在△ABC中，$\tan(\angle ABC+\angle ACB)=-\tan\angle BAC=-\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{\tan\angle ABC+\tan\angle ACB}{1-\tan\angle ABC\tan\angle ACB}=-\sqrt{3}$，

因此 $\tan\angle ABC\tan\angle ACB=3$，

故 $\tan\angle ABC$，$\tan\angle ACB$ 为方程 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$ 两根，即 $\tan\angle ABC=\tan\angle ACB=\sqrt{3}$，

因为$\angle ABC$，$\angle ACB\in(0,\pi)$，所以$\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$，所以△$ABC$为等边三角形，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 6^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

4．在锐角三角形 ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c\sin B+\frac{\sqrt{3}}{3}b\cos(A+B)=\frac{\sqrt{3}}{3}b$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若 $c=\sqrt{3}$，角 A 与角 B 的内角平分线相交于点 D，求△ABD 面积的取值范围.

【解析】(1)∵$c\sin B+\frac{\sqrt{3}}{3}b\cos(A+B)=\frac{\sqrt{3}}{3}b$，由正弦定理可得：$\sin C\sin B+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B\cos(A+B)=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B$，

$\therefore \sin C\sin B-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B$，

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \sin C-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，∵$C$ 为锐角，

$\therefore C-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由题意可知$\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$，

设$\angle DAB=\alpha$，$\therefore \angle ABD=\frac{\pi}{3}-\alpha$，

$\because 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$，又∵$B=\pi-\frac{\pi}{3}-2\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore \alpha\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$，

在△ABD 中，由正弦定理可得：$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$，

即$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$，$\therefore AD=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\alpha$

$=\frac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

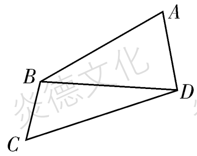
$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$，$\therefore 2\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\in\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$，

∴三角形 ABD 面积的取值范围为$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

5．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$CD=3\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{7}$，$\cos\angle CBD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$.



(1)求$\angle BDC$；

(2)若$\angle A=\frac{\pi}{3}$，求$\triangle ABD$周长的最大值.

【解析】(1)在$\triangle BCD$中，$\because \cos\angle CBD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，

$\therefore \sin\angle CBD=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

利用正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，

$\therefore \sin\angle BDC=\frac{BC\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\frac{\sqrt{7}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

又$\because \angle CBD$为钝角，$\therefore \angle BDC$为锐角，

$\therefore \angle BDC=\frac{\pi}{6}$.

(2)在$\triangle BCD$中，由余弦定理得$\cos\angle CBD=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2BC\cdot BD}=\frac{7+BD^2-27}{2\sqrt{7}\cdot BD}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，

解得$BD=4$或$BD=-5$(舍去)，

在$\triangle ABD$中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，设$AB=x$，$AD=y$，

由余弦定理得$\cos A=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{x^2+y^2-16}{2x\cdot y}=\frac{1}{2}$，即$x^2+y^2-16=xy$，

整理得$(x+y)^2-16=3xy$，又$x>0$，$y>0$，

利用基本不等式得$(x+y)^2-16=3xy\leqslant\frac{3(x+y)^2}{4}$，

即$\frac{(x+y)^2}{4}\leqslant 16$，即$(x+y)^2\leqslant 64$，当且仅当$x=y=4$时，等号成立，即$(x+y)_{max}=8$，

$\therefore (AB+AD+BD)_{max}=8+4=12$，

$\therefore \triangle ABD$周长的最大值为12.

6．在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为角A，B，C所对的边．已知①$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$；②$\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2S_{\triangle ABC}$；③$\sin B+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

(1)求B；

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

【解析】(1)选①：由题设及正弦定理得

$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$，

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$.

由$A+B+C=180°$，可得$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$，

故$\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$，

$\because \cos\frac{B}{2}\neq 0$，$\therefore \sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，所以$B=60°$.

选②：$\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2S_{\triangle ABC}$，

$\therefore\sqrt{3}ac\cos B=2\cdot\frac{1}{2}ac\sin B$，$\therefore\sin B=\sqrt{3}\cos B$，

$\because B\in(0，\pi)$，$\therefore\sin B>0$，则 $\cos B>0$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

选③：由 $\sin B+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，

得 $\sin B+\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sqrt{3}$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B=1$，$\therefore\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\because B\in(0，\pi)$，$\therefore B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6}，\frac{7\pi}{6}\right)$，$\therefore B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由题设及(1)知，$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，

由(1)知，$A+C=120°$，

由正弦定理得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(120°-C)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$，

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，故 $0°<A<90°$，$0°<C<90°$.

结合 $A+C=120°$，得 $30°<C<90°$.

所以$\frac{1}{2}<a<2$，从而$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，$\triangle ABC$ 面积的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{8}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7．$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若 $\sin C=2\sin A\sin B$．点 D 在边 AB 所在的直线上，且 $CD\perp AB$.

(1)证明：$CD=\frac{1}{2}c$；

(2)若 $a^2+b^2=\sqrt{6}ab$，求$\angle ACB$.

【解析】(1)由 $\sin C=2\sin A\sin B$ 及正弦定理得 $c=2a\sin B$.

又$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}c\times CD=\frac{1}{2}c\cdot a\cdot\sin B$，

$\therefore CD=a\sin B$，$\therefore CD=\frac{1}{2}c$.

(2)在$\triangle ABC$ 中，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin\angle ACB=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

又由(1)知，$CD=\frac{1}{2}c$，$\therefore c^2=2ab\sin\angle ACB$，

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle ACB$，

$\therefore 2ab\sin\angle ACB=\sqrt{6}ab-2ab\cos\angle ACB$，

$\therefore\sin\angle ACB+\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore\sqrt{2}\sin\left(\angle ACB+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

即 $\sin\left(\angle ACB+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because\angle ACB+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4}，\frac{5\pi}{4}\right)$，

$\therefore \angle ACB+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{3}$，或 $\angle ACB+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \angle ACB=\dfrac{\pi}{12}$或 $\angle ACB=\dfrac{5\pi}{12}$.

8． 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $a_1=1$， $a_{n+1}=2S_n(n\in N^*)$, ,

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n；

（2）求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【解析】（1）$\because a_{n+1}=2S_n$，，$\therefore S_{n+1}-S_n=2S_n$ $\therefore \dfrac{S_{n+1}}{S_n}=3$. 又 $\because S_1=a_1=1$,

$\therefore$数列 $\{S_n\}$ 是首项为 1、公比为 3 的等比数列，$S_n=3^{n-1}\quad(n\in N^*)$.

$\therefore$当 $n\geq 2$ 时， $a_n=2S_{n-1}=2\cdot 3^{n-2}(n\geq 2)$,$\therefore a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2\cdot 3^{n-2}, n\geq 2\end{cases}$

（2）$T_n=a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n$，

当 $n=1$ 时， $T_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时， $T_n=1+4\cdot 3^0+6\cdot 3^1+\ldots+2n\cdot 3^{n-2}$， …①

$3T_n=3+4\cdot 3^1+6\cdot 3^2+\ldots+2n\cdot 3^{n-1}$， …②

①－②得：

$-2T_n=-2+4+2(3^1+3^2+\ldots+3^{n-2})-2n\cdot 3^{n-1}=2+2\cdot\dfrac{3(1-3^{n-2})}{1-3}-2n\cdot 3^{n-1}=-1+(1-2n)\cdot 3^{n-1}$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}+(n-\dfrac{1}{2})3^{n-1}(n\geqslant 2)$，

又 $\because T_1=a_1=1$ 也满足上式，$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}+(n-\dfrac{1}{2})3^{n-1}(n\in N^*)$.

9．已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n, 且 $a_5=S_3=a_2^2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n;

(2)在数列$\{b_n\}$中， $b_1=2$, 且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=b_{n+1}-2$. 若对任意的正整数 n, 不等式 $\lambda^2\cdot b_n-2^{n+1}\leqslant\lambda\cdot(S_n-1)$ 恒成立， 求实数 λ 的取值范围.

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq 0)$，

由 $a_5=S_3=a_2^2$，得$\begin{cases}a_1+4d=3a_1+3d，①\\ a_1+4d=(a_1+d)^2，②\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=0，\\ d=0\end{cases}$ (舍)或$\begin{cases}a_1=1，\\ d=2，\end{cases}$

所以 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=n^2$.

(2)由 $b_1+b_2+\cdots+b_n=b_{n+1}-2$，

得 $b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}=b_{n+2}-2$，

相减得 $b_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$，即 $b_{n+2}=2b_{n+1}$.

又 $b_1=2$，$b_1=b_2-2$，得 $b_2=b_1+2=2b_1$，

故 $b_{n+1}=2b_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $b_n=2^n$.

将 S_n，b_n 代入 $\lambda^2\cdot b_n-2^{n+1}\leqslant\lambda\cdot(S_n-1)$，得

$\lambda^2\cdot 2^n-2^{n+1}\leqslant\lambda\cdot(n^2-1)$，

即有 $\lambda^2-2\leqslant\lambda\cdot\frac{n^2-1}{2^n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

(ⅰ)当 $\lambda=0$ 时，$-2\leqslant 0$ 成立，所以 $\lambda=0$ 符合题意;

(ⅱ)当 $\lambda>0$ 时，由 $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}\leqslant\frac{n^2-1}{2^n}$ 恒成立，

即 $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}\leqslant\left(\frac{n^2-1}{2^n}\right)_{\min}$，

易知当 $n=1$ 时，$\frac{n^2-1}{2^n}=0$;

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{n^2-1}{2^n}>0$，故 $\left(\frac{n^2-1}{2^n}\right)_{\min}=0$.

所以 $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}\leqslant 0$，且 $\lambda>0$，可解得 $0<\lambda\leqslant\sqrt{2}$;

(ⅲ)当 $\lambda<0$ 时，由 $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}\geqslant\frac{n^2-1}{2^n}$ 恒成立，

即 $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}\geqslant\left(\frac{n^2-1}{2^n}\right)_{\max}$，

由 $\frac{(n+1)^2-1}{2^{n+1}}-\frac{n^2-1}{2^n}=\frac{-n^2+2n+2}{2^{n+1}}$，

可知当 $n=1$，2 时，$\frac{-n^2+2n+2}{2^{n+1}}>0$，

即 $\frac{(n+1)^2-1}{2^{n+1}}>\frac{n^2-1}{2^n}$;

当 $n\geqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\frac{-n^2+2n+2}{2^{n+1}}<0$，

即 $\frac{(n+1)^2-1}{2^{n+1}}<\frac{n^2-1}{2^n}$，

又当 $n=1$ 时，$\frac{n^2-1}{2^n}=0$，当 $n=2$ 时，$\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{3}{4}>0$，当 $n=3$ 时，$\frac{n^2-1}{2^n}=\frac{3^2-1}{2^3}=1>\frac{3}{4}$，

所以 $a_1<a_2<a_3>a_4>a_5>a_6>\cdots$，

所以 $\left(\frac{n^2-1}{2^n}\right)_{\max}=\frac{3^2-1}{2^3}=1$.

即 $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}\geqslant 1$ 且 $\lambda<0$，得 $\lambda^2-\lambda-2\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant\lambda<0$;

综上，$-1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2}$.

10．已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$，S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，记 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的前 n 项和为 G_n，$\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$ 的前 n 项积为 T_n，且 $G_n=2T_n-2$.

(1)若 $S_n=\frac{3^n-1}{2}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $S_n=a_n$，对任意自然数 $n\in\mathbf{N}^*$，都有$\frac{b_1}{a_1a_2}+\frac{b_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_na_{n+1}}>\lambda\cdot\frac{(-1)^n}{a_{n+1}}$，求实数 λ 的取值范围.

【解析】(1)$\because G_n=(a_{n+1}-a_n)+(a_n+a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)=a_{n+1}-1$，

$T_n=\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}=b_{n+1}$.

$\because G_n=2T_n-2$，$\therefore a_{n+1}=2b_{n+1}-1$，$n\geqslant1$，

又 $a_1=b_1=1$ 满足 $a_1=2b_1-1$，$\therefore a_n=2b_1-1$.

$\because S_n=\frac{3^n-1}{2}$，

$\therefore b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}-1}{2}=3^{n-1}(n\geqslant2)$.

$\because b_1=1$，$\therefore b_n=3^{n-1}$，$\therefore a_n=2b_n-1=2\cdot3^{n-1}-1$.

(2)$\because S_n=a_n$，$S_{n-1}=a_{n-1}(n\geqslant2)$，

$\therefore b_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant2)$.

$\because a_n=2b_n-1$，$\therefore\frac{a_n+1}{2}=a_n-a_{n-1}(n\geqslant2)$，

$\therefore a_n=2a_{n-1}+1(n\geqslant2)$，$\therefore a_n=2^n-1$，$b_n=2^{n-1}$.

$\because\frac{b_1}{a_1a_2}+\frac{b_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_na_{n+1}}=\frac{2^0}{(2^1-1)(2^2-1)}+\frac{2^1}{(2^2-1)(2^3-1)}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$，

$\therefore\frac{b_1}{a_1a_2}+\frac{b_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_na_{n+1}}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)>(-1)^n\cdot\lambda\cdot\frac{1}{2^{n+1}-1}$，

两边同乘以 $2^{n+1}-1(n\geqslant1$ 时，$2^{n+1}-1>0)$，

$\therefore$条件不等式等价于$(2^n-1)>(-1)^n\cdot\lambda$，

$\therefore$当 n 为偶数时，$\lambda<2^n-1$ 恒成立，当 $n=2$ 时，$2^n-1\geqslant2^2-1=3$，故 $\lambda<3$;

当 n 为奇数时，$\lambda>1-2^n$ 恒成立，当 $n=1$ 时，$1-2^n\leqslant1-2=-1$，故 $\lambda>-1$;

故 $-1<\lambda<3$.

11．已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_5=9$，$a_4+a_8=22$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $b_1=a_1$，再从下面①②③中选取两个作为条件，求满足 $S_n<2022$ 的 n 的最大值.

①$b_3=a_1+a_2$；②$S_3=7$；③$b_{n+1}>b_n$.

(注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.)

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

因为 $a_4+a_8=22$，则 $2a_6=22$，即 $a_6=11$，

于是得 $d=a_6-a_5=11-9=2$，

从而有 $a_n=a_5+(n-5)\times2=2n-1$，

所以$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2n-1$.

(2)选择①②：设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

因为 $b_1=a_1$，$b_3=a_1+a_2$，由(1)知，$b_1=1$，$b_3=4$，而 $S_3=7$，则 $b_2=S_3-b_1-b_3=2$，即有 $q=\frac{b_2}{b_1}=2$，

于是得 $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$，

因为 $S_n<2022$，即 $2^n-1<2022$，

而 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\leqslant10$，则 $n_{\max}=10$，

所以满足 $S_n<2022$ 的 n 的最大值为 10.

选择①③：设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

因为 $b_1=a_1$，$b_3=a_1+a_2$，由(1)知，则 $b_1=1$，$b_3=4$，

由 $q^2=\dfrac{b_3}{b_1}=4$，解得 $q=\pm2$，

又 $b_{n+1}>b_n$，则有 $q=2$，

于是得 $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$，

因为 $S_n<2022$，即 $2^n-1<2022$，

而 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\leqslant10$，则 $n_{\max}=10$，

所以满足 $S_n<2022$ 的 n 的最大值为 10.

选择②③：设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

因为 $S_3=7$，由(1)知，$b_1=1$，则 $1+q+q^2=7$，

解得 $q=2$ 或 $q=-3$，而 $b_{n+1}>b_n$，则有 $q=2$，

于是得 $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$，

因为 $S_n<2022$，即 $2^n-1<2022$，

而 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\leqslant10$，则 $n_{\max}=10$，

所以满足 $S_n<2022$ 的 n 的最大值为 10.

12．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为整数，公比为 q，且$|q|>1$，数列$\{a_n\}$中有连续四项在集合 $M=\{-96，-24，36，48，192\}$中.

(1)求 q，并写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式；

(2)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，证明：数列$\{a_n\}$中的任意连续三项按适当顺序排列后，可以成等差数列.

【解析】(1)等比数列$\{a_n\}$的各项均为整数，公比为 q，且$|q|>1$，数列$\{a_n\}$中有连续四项在集合 $M=\{-96，-24，36，48，192\}$中，

根据观察得知：$M=\{-96，-24，36，48，192\}$中的-24，48，-96，192，这四项构成公比为-2 的等比数列；当 $a_1=-24$ 时，所以 $a_n=12\cdot(-2)^n$.

(2)由(1)知 $a_n=a_1\cdot(-2)^{n-1}$，

根据等比数列的前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_1\cdot(-2)^n}{1+2}=\dfrac{a_1}{3}-\dfrac{a_1}{3}\cdot(-2)^n$，

所以 $S_{n+1}=\dfrac{a_1}{3}-\dfrac{a_1}{3}\cdot(-2)^{n+1}$，

$S_{n+2}=\dfrac{a_1}{3}-\dfrac{a_1}{3}\cdot(-2)^{n+2}=\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{2a_1}{3}\cdot(-2)^{n+1}$，

则 $S_{n+1}+S_{n+2}=\dfrac{2a_1}{3}+\dfrac{a_1}{3}(-2)^{n+1}=\dfrac{2a_1}{3}-\dfrac{2a_1}{3}(-2)^n$，

$2S_n=\dfrac{2a_1}{3}-\dfrac{2a_1}{3}\cdot(-2)^n$，

故 $2S_n=S_{n+1}+S_{n+2}$，故 S_{n+1}，S_n，S_{n+2} 构成等差数列.

13．已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n=\dfrac{1}{4}a_n^2+\dfrac{1}{2}a_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，对每个正整数 k，在 b_k 与 b_{k+1} 之间插入 a_k 个 1，得到一个新的数列$\{c_n\}$，记数列$\{c_n\}$的前 m 项和为 T_m.求使得 $T_m=2c_{m+1}$ 成立的所有正整数 m 的值.

【解析】(1)当 $n=1$ 时，由 $a_1=S_1=\frac{1}{4}a_1^2+\frac{1}{2}a_1$ 及 a_1 为正整数，得 $a_1=2$;

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4}a_n^2+\frac{1}{2}a_n-\left(\frac{1}{4}a_{n-1}^2+\frac{1}{2}a_{n-1}\right)$，

得 $\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-2\right)=0$，

$\because a_n+a_{n-1}>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2$.

故 $\{a_n\}$ 是首项和公差均为 2 的等差数列.

$\therefore a_n=2+(n-1)\cdot 2=2n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当 $m=1$ 时，$T_1=c_1=b_1=2$，$2c_2=2\times 1=2$，满足要求.

当 $m\geqslant 2$ 时，若 $c_{m+1}=1$，则 $T_m\geqslant T_2=3>2c_{m+1}$，不满足要求;

若 $c_{m+1}\neq 1$，则 c_{m+1} 必为数列 $\{b_n\}$ 中的某一项，不妨设 $c_{m+1}=2^{k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$，

于是 $T_m=\left(b_1+b_2+\cdots+b_k\right)+\left(a_1+a_2+\cdots+a_k\right)$

$=\left(2+2^2+\cdots+2^k\right)+(2+4+\cdots+2k)$

$=2^{k+1}+k^2+k-2$.

由 $T_m=2c_{m+1}$，得 $2^{k+1}+k^2+k-2=2\times 2^{k+1}$，

即 $2^{k+1}=k^2+k-2(k\in\mathbf{N}^*)$.　(*)

显然，$k=1$ 不满足(*)，则当 $k\geqslant 2$ 时，有

$2^{k+1}=2(1+1)^k=2\left(C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^k\right)$

$\geqslant 2\left(C_k^0+C_k^1+C_k^2\right)=k^2+k+2>k^2+k-2$，

$\therefore$ 方程(*)无正整数解.

综上所述，满足条件的正整数 m 只有一个，即 $m=1$.

14．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $\lambda>0$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(3)证明存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立.

【解析】(1)由 $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\lambda>0$，

可得 $\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n+1}=\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n+1$，

所以 $\left\{\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\right\}$ 为等差数列，其公差为 1，首项为 0，故 $\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n=n-1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$.

(2)设 $T_n=\lambda^2+2\lambda^3+3\lambda^4+\cdots+(n-1)\lambda^n$，①

$\lambda T_n=\lambda^3+2\lambda^4+3\lambda^5+\cdots+(n-2)\lambda^n+(n-1)\lambda^{n+1}$，②

当 $\lambda\neq 1$ 时，①式减去②式，

得 $(1-\lambda)T_n=\lambda^2+\lambda^3+\cdots+\lambda^n-(n-1)\lambda^{n+1}$

$=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}-(n-1)\lambda^{n+1}$，

$T_n=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}-\frac{(n-1)\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$

$=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}$.

这时数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+2^{n+1}-2$.

当 $\lambda=1$ 时，$T_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

这时数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(n-1)}{2}+2^{n+1}-2$.

(3)通过分析，推测数列$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$的第一项$\frac{a_2}{a_1}$最大，下面证明：$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{a_2}{a_1}=\frac{\lambda^2+4}{2}$，$n\geqslant 2$，③

由$\lambda>0$知$a_n>0$，要使③式成立，

只要$2a_{n+1}<(\lambda^2+4)a_n(n\geqslant 2)$，

因为$(\lambda^2+4)a_n=(\lambda^2+4)(n-1)\lambda^n+(\lambda^2+4)2^n$

$>4\lambda\cdot(n-1)\lambda^n+4\times 2^n=4(n-1)\lambda^{n+1}+2^{n+2}$

$\geqslant 2n\lambda^{n+1}+2^{n+2}=2a_{n+1}$，$n\geqslant 2$.

所以③式成立.

因此，存在$k=1$，使得$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_2}{a_1}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$均成立.

15．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=(1+\lambda)-\lambda a_n$，其中$\lambda\neq-1$，0.

(1)证明：数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2)设数列$\{a_n\}$的公比$q=f(\lambda)$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=\frac{1}{2}$，$b_n=f(b_{n-1})(n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2)$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(3)记$\lambda=1$，$C_n=a_n\left(\frac{1}{b_n}-1\right)$，求数列$\{C_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【解析】(1)由$S_n=(1+\lambda)-\lambda a_n\Rightarrow S_{n-1}=(1+\lambda)-\lambda a_{n-1}(n\geqslant 2)$，

相减得：$a_n=-\lambda a_n+\lambda a_{n-1}$，

$\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\lambda}{1+\lambda}(n\geqslant 2)$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是等比数列.

(2)$f(\lambda)=\frac{\lambda}{1+\lambda}$，$\therefore b_n=\frac{b_{n-1}}{1+b_{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_{n-1}}+1$，

$\therefore\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$是首项为$\frac{1}{b_1}=2$，公差为1的等差数列；$\therefore\frac{1}{b_n}=2+(n-1)=n+1$，

$\therefore b_n=\frac{1}{n+1}$，

(3)$\lambda=1$时，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore C_n=a_n\left(\frac{1}{b_n}-1\right)=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore T_n=1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，①

$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$，②

①－②得：$\frac{1}{2}T_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$\therefore\frac{1}{2}T_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

所以$T_n=4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-2n\left(\frac{1}{2}\right)^n=4-\frac{2+n}{2^{n-1}}$.

16．设公比为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_3=8$，$S_2=48$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=4\log_2 a_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求正整数m的值，使得$\frac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}$是数列$\{b_n\}$中的项.

【解析】(1)设$\{a_n\}$的公比为q，

则有$\begin{cases}a_1\cdot q^2=8,\\ a_1+a_1q=48,\end{cases}$解得$q=\frac{1}{2}$，或$q=-\frac{1}{3}$(舍).

则$a_1=\frac{8}{q^2}=32$，$a_n=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{6-n}$，

$b_n=4\log_2 a_n=4\log_2 2^{6-n}=-4n+24$.

即数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{6-n}$，$b_n=-4n+24$.

(2)$\dfrac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}=\dfrac{(24-4m)(20-4m)}{(16-4m)}$

$=\dfrac{4(6-m)(5-m)}{(4-m)}$，令 $t=4-m(t\leqslant 3，t\in\mathbf{Z})$，

所以$\dfrac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}=\dfrac{4(6-m)(5-m)}{(4-m)}=\dfrac{4(2+t)(1+t)}{t}$

$=4\left(t+3+\dfrac{2}{t}\right)$，

如果$\dfrac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}$是数列$\{b_n\}$中的项，设为第 m_0 项，则有 $4\left(t+3+\dfrac{2}{t}\right)=4(6-m_0)$，

那么 $t+3+\dfrac{2}{t}$为小于等于 5 的整数，

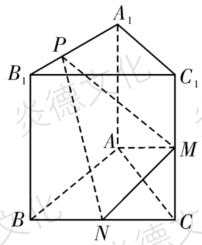
所以 $t\in\{-2，-1，1，2\}$.

当 $t=1$ 或 $t=2$ 时，$t+3+\dfrac{2}{t}=6$，不合题意;

当 $t=-1$ 或 $t=-2$ 时，$t+3+\dfrac{2}{t}=0$，符合题意.

所以，当 $t=-1$ 或 $t=-2$ 时，即 $m=5$ 或 $m=6$ 时，$\dfrac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}$是数列$\{b_n\}$中的项.

17.如图，已知三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 为正方形，$AB=AC=2$，$AM\perp A_1B_1$，M，N 分别是 CC_1，BC 的中点，点 P 是线段 A_1B_1 上的动点.



(1)证明：$AM\perp PN$;

(2)已知 $BC=2\sqrt{2}$，求平面 PMN 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值的取值范围.

【解析】(1)在三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中，取 AC 中点 D，连接 DN，A_1D，如图，而 N 是 BC 中点，于是得 $DN /\!/ AB /\!/ A_1B_1$，

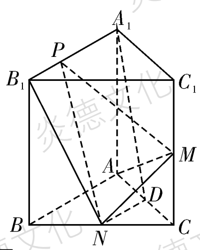
在正方形 AA_1C_1C 中，$AA_1=AC$，$AD=CM$，$\angle A_1AC=\angle ACM$，则$\triangle A_1AD\cong\triangle ACM$，

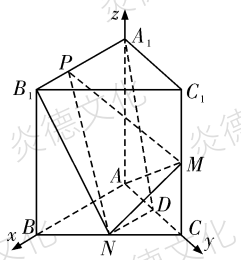
即$\angle AA_1D=\angle CAM$，又$\angle AA_1D+\angle A_1DA=\dfrac{\pi}{2}$，

则$\angle CAM+\angle A_1DA=\dfrac{\pi}{2}$，即 $AM\perp A_1D$，

因为 $AM\perp A_1B_1$，$A_1B_1\cap A_1D=A_1$，从而得 $AM\perp$平面 A_1B_1ND，又 $NP\subset$平面 A_1B_1ND，

所以 $AM\perp PN$.





(2)因为 $AB=AC$，$BC=2\sqrt{2}$，则 $AB^2+AC^2=BC^2$，

即有 $AB\perp AC$，

又 $AM\perp A_1B_1$，$A_1B_1\parallel AB$，于是得 $AM\perp AB$，
而又 $AM\cap AC=A$，则 $AB\perp$平面 ACC_1A_1，即有 $AB\perp AA_1$，
以射线 AB，AC，AA_1 分别为 x，y，z 轴非负半轴建立空间直角坐标系，如图，
$N(1，1，0)$，$M(0，2，1)$，设 $P(t，0，2)$，$t\in[0，2]$，
$\overrightarrow{NM}=(-1，1，1)$，$\overrightarrow{MP}=(t，-2，1)$，
设平面 MNP 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NM}=-x+y+z=0，\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=tx-2y+z=0，\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(1，\dfrac{1+t}{3}，\dfrac{2-t}{3}\right)$，
而平面 ABC 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0，0，1)$，
设平面 PMN 与平面 ABC 所成锐二面角为 θ，显然 $t\neq2$，
否则 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\frac{2-t}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1+t}{3}\right)^2+\left(\frac{2-t}{3}\right)^2}}\right|$

$=\sqrt{\dfrac{(2-t)^2}{9+(1+t)^2+(2-t)^2}}$，

令 $u=2-t\in(0，2]$，则 $\dfrac{1}{u}\geqslant\dfrac{1}{2}$，

于是得 $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{u^2}{2u^2-6u+18}}=\sqrt{\dfrac{1}{\frac{18}{u^2}-\frac{6}{u}+2}}$

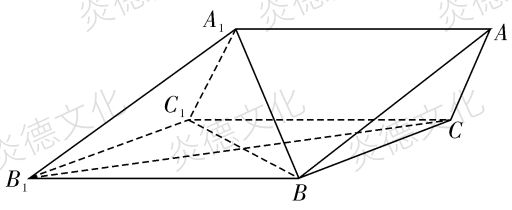
$=\sqrt{\dfrac{1}{18\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{2}}}\leqslant\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

当且仅当 $u=2$，即 $t=0$ 时取“=”，

当点 P 接近点 B_1 时，θ就接近于直角，即 $\cos\theta$就接近于 0，于是有 $0<\cos\theta\leqslant\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

所以平面 PMN 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值的取值范围是$\left(0，\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right]$.

18．在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=AA_1=3$，$AC=2$，$B_1C=2\sqrt{7}$，平面 $A_1BC_1\perp$平面 BB_1C_1C.

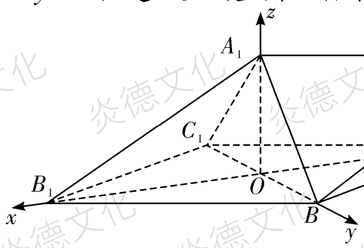


(1)证明：$A_1B\perp B_1C$；
(2)求点 A 到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离.
【解析】(1)∵$BC=B_1B=AA_1=3$，∴四边形 BB_1C_1C 是菱形．∴$B_1C\perp BC_1$.
又平面 $A_1BC_1\perp$平面 BB_1C_1C，平面 $A_1BC_1\cap$平面 $BB_1C_1C=BC_1$.∴$B_1C\perp$平面 A_1BC_1.
又∵$A_1B\subset$平面 A_1BC_1，∴$B_1C\perp A_1B$，即 $A_1B\perp B_1C$.
(2)设 $B_1C\cap BC_1=O$，连接 A_1O.
由(1)的结论 $B_1C\perp$平面 A_1BC_1，得 $B_1C\perp A_1O$，

$\therefore A_1O=\sqrt{3^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{2}$，又 $C_1O=\sqrt{B_1C_1^2-B_1O^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{2}$，

而 $A_1C_1=2$，$\therefore A_1O\perp C_1O$，$\therefore A_1O\perp$ 平面 BCC_1B_1.

以 OB_1，OB，OA_1 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



则 $B(0,\sqrt{2},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2})$，$B_1(\sqrt{7},0,0)$，

$C_1(0,-\sqrt{2},0)$，

$\therefore \overrightarrow{C_1B_1}=(\sqrt{7},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=(-\sqrt{7},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{B_1B}=(-\sqrt{7},\sqrt{2},0)$.

设平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{7}x+\sqrt{2}y=0,\\ -\sqrt{7}x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{7},\sqrt{7})$.

因为 $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$，所以 $\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{B_1B}=(-\sqrt{7},\sqrt{2},0)$，

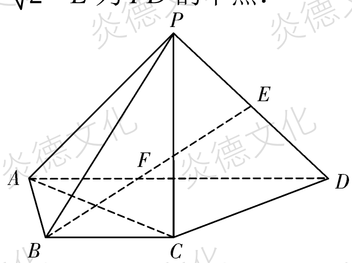
记点 A 到平面 $A_1B_1C_1$ 为的距离为 d.

则 $d=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1A}\right|}{|\boldsymbol{n}|}$

$=\dfrac{\left|\sqrt{2}\times(-\sqrt{7})+(-\sqrt{7})\times\sqrt{2}+\sqrt{7}\times 0\right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{7})^2+(\sqrt{7})^2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

即点 A 到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

19．如图，四棱锥 $PABCD$ 中，$\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，$BC\parallel AD$，$AB\perp AD$，$AD=2AB=2BC=2$，$PC=\sqrt{2}$，E 为 PD 的中点.



(1)求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值；

(2)设 F 是 BE 的中点，判断点 F 是否在平面 PAC 内，并证明结论.

【解析】(1)直角梯形 $ABCD$ 中，由已知可得 $AC=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2}$，$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$，即 $AC\perp CD$，

又 $\triangle APD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，

$\therefore PA=PD=\sqrt{2}=PC$，

取 AD 中点 O，连接 OC，OP，则 $OC=OA=OD=1$，$OP=1$，

则 $\triangle OAP\cong\triangle OCP\cong\triangle ODP$，

$\therefore \angle POA=\angle POC=\angle POD$，

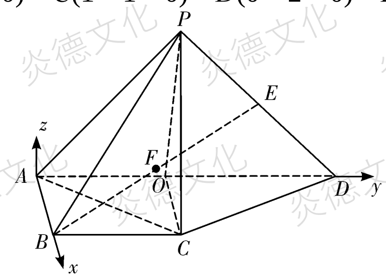
又 $\angle POA+\angle POD=180°$，

$\therefore \angle POA=\angle POC=\angle POD=90°$，

$\therefore OP\perp AD$，$OP\perp OC$，而 $OC\cap AD=O$，OC，$AD\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore OP\perp$平面 $ABCD$，

因此可以 AB，AD 为 x，y 轴，过 A 平行于 OP 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$，如图，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,1,1)$，



$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，

设平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=x+y=0,\end{cases}$

取 $y=-1$，则 $x=z=1$，即 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，

又 $\overrightarrow{BP}=(-1,1,1)$，

$\cos\langle\overrightarrow{BP},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BP}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-1-1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}$，

设直线 PB 与平面 PAC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BP},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{1}{3}$.

(2)由(1)$E\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，

$\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，

设 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AP}$，

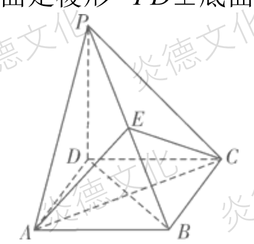
则 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)=x(1,1,0)+y(0,1,1)$，

$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ x+y=\dfrac{3}{4},\\ y=\dfrac{1}{4},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{1}{4},\end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AP}$，$\therefore \overrightarrow{AF}$与$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$共面，

$\therefore F$ 在平面 PAC 内.

20．如图，四棱锥 $P—ABCD$ 的底面是棱形，$PD\perp$底面 $ABCD$，点 E 是线段 PB 的中点.



(1)求证：$AC\perp PB$；

(2)当$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$, $PD=\sqrt{2}AB$ 时，求直线 AE 与平面 PBC 所成角的正弦值.

【解析】(1)因为四边形 $ABCD$ 为棱形，则 $AC\perp BD$，

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

则 $AC\perp PD$，

又 $BD\cap PD=D$，所以 $AC\perp$ 平面 PBD，

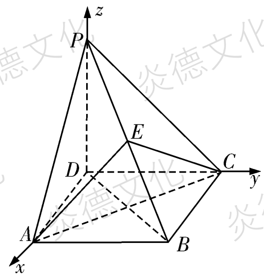
因为 $PB\subset$ 平面 PBD，所以 $AC\perp PB$.

(2)设 $AB=1$，则 $PD=\sqrt{2}$，因为$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$AB\perp AD$，

所以四边形 $ABCD$ 为正方形，

又 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，所以 DA，DC，DP 两两垂直，

以点 D 为坐标原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1，0，0)$，$B(1，1，0)$，$P(0，0，\sqrt{2})$，$C(0，1，0)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x，y，z)$，

$\overrightarrow{CB}=(1，0，0)$，$\overrightarrow{CP}=(0，-1，\sqrt{2})$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=x=0，\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-y+\sqrt{2}z=0，\end{cases}$ 取 $y=\sqrt{2}$，

可得 $\boldsymbol{m}=(0，\sqrt{2}，1)$，$\because\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AE}，\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{2}}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

因此，直线 AE 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

21．如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\mathbin{/\mkern-4mu/}DC$，$AD=BC=CD=2$，$AB=4$，$E$ 为 AB 的中点，以 DE 为折痕把$\triangle ADE$ 折起，连接 AB，AC，得到如图 2 的几何体，在图 2 的几何体中解答下列两个问题.

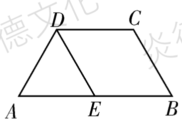


图1

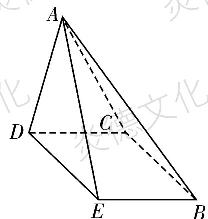


图2

(1)证明：$AC\perp DE$；

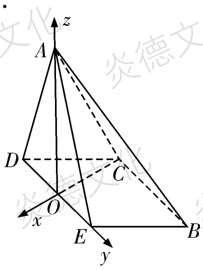
(2)请从以下两个条件中选择一个作为已知条件，求二面角 $DAEC$ 的余弦值.

①四棱锥 $ABCDE$ 的体积为 2；②直线 AC 与 EB 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分.

【解析】(1)在图 1 中因为 $DC\mathbin{/\mkern-4mu/}AB$，$CD=\frac{1}{2}AB$，$E$ 为 AB 中点，所以 $DC\mathbin{/\mkern-4mu/}AE$，$DC=AE$，

所以 $ADCE$ 为平行四边形，所以 $AD=CE=CD=AE=2$，同理可证 $DE=2$，
在图 2 中，取 DE 中点 O，连接 OA，OC，$OA=OC=\sqrt{3}$，
因为 $AD=AE=CE=CD$，所以 $DE\perp OA$，$DE\perp OC$，
因为 $OA\cap OC=O$，所以 $DE\perp$平面 AOC，
因为 $AC\subset$平面 AOC，所以 $DE\perp AC$.



(2)若选择①：因为 $DE\perp$平面 AOC，$DE\subset$平面 $BCDE$，
所以平面 $AOC\perp$平面 $BCDE$ 且交线为 OC，所以过点 A 作 $AH\perp OC$，则 $AH\perp$平面 $BCDE$，因为 $S_{BCDE}=2\sqrt{3}$，
所以四棱锥 $ABCDE$ 的体积
$V_{ABCDE}=2=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\cdot AH$，
所以 $AH=\sqrt{3}=OA$，所以 AO 与 AH 重合，
所以 $AO\perp$平面 $BCDE$，
建系如图，则 $O(0,0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,1,0)$，$A(0,0,\sqrt{3})$，
易知平面 DAE 的一个法向量为 $\overrightarrow{CO}=(\sqrt{3},0,0)$，
设平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
因为 $\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，
所以 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ \sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$，
设二面角 $DAEC$ 的大小为 θ，
则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CO}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，
所以二面角 $DAEC$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
若选择②：因为 $DC\parallel EB$，所以 $\angle ACD$ 即为异面直线 AC 与 EB 所成角，
在 $\triangle ADC$ 中，$\cos\angle ACD=\frac{AC^2+4-4}{4AC}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，
所以 $AC=\sqrt{6}$，所以 $OA^2+OC^2=AC^2$，所以 $OA\perp OC$，
因为 $DE\perp$平面 AOC，$DE\subset$平面 $BCDE$，
所以平面 $AOC\perp$平面 $BCDE$ 且交线为 OC，
所以 $AO\perp$平面 $BCDE$，
建系如图，则 $O(0,0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,1,0)$，$A(0,0,\sqrt{3})$，
易知平面 DAE 的一个法向量为 $\overrightarrow{CO}=(\sqrt{3},0,0)$，
设平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
因为 $\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，
所以 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ \sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$，
设二面角 $DAEC$ 的大小为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{CO}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{CO}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以二面角 $DAEC$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.